第 24 講　数列(2)

1 ［1］ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)$ を求めよ.

［2］ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}$ を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　数列 1，1＋3＋1，1＋3＋9＋3＋1，1＋3＋9＋27＋9＋3＋1，……
の第 n 項から第 $2n$ 項までの和を求めよ．ただし，n は自然数とする．

[2]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$\log_{10}(S_n+1)=n$ が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n を正の整数，r を 0 および 1 でない実数とし，$S=\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$，$T=\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$，$U=\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を記号 $\sum$ を用いずに r，n で表せ．

(2)　T を記号 $\sum$ を用いずに S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3)　U を記号 $\sum$ を用いずに S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　数列(2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n^3+6n^2+n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）であるとき，一般項は $a_n=$ ［ア］n^2+［イ］$n-$［ウ］である．さらに，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}\left(\frac{1}{3n-\boxed{\text{オ}}}-\frac{1}{3n+\boxed{\text{カ}}}\right),\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　数列(2)

1 [1]　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)$ を求めよ.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)(i+n)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{-i^2+i+n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n(n+1)\cdot n\right\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{-(2n+1)+3+6n\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

【別解】　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=2}^{n}k+\sum_{k=3}^{n}k+\cdots\cdots+\sum_{k=n}^{n}k$

$=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$

$+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$

$+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$

$\vdots$

$+(n-1)+n$

$+n$

$$=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots\cdots+n\cdot n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

1 [2]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}$ を求めよ.

$$\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(n-\frac{n}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n^2}{2n+1}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　数列 1，1＋3＋1，1＋3＋9＋3＋1，1＋3＋9＋27＋9＋3＋1，……
の第 n 項から第 $2n$ 項までの和を求めよ．ただし，n は自然数とする．

第 n 項は　$1+3+\cdots\cdots+3^{n-2}+3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots\cdots+3+1$

$$=2\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}-3^{n-1}=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-3^{n-1}=3^n-3^{n-1}-1=2\cdot3^{n-1}-1$$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}(2\cdot3^{k-1}-1)=\frac{2\cdot3^{n-1}(3^{n+1}-1)}{3-1}-1\cdot(n+1)=\boldsymbol{3^{2n}-3^{n-1}-n-1}$

2 [2]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$\log_{10}(S_n+1)=n$ が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\log_{10}(S_n+1)=n$ より　$S_n+1=10^n$　　よって　$S_n=10^n-1$　　$a_1=S_1=10^1-1=9$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-1-(10^{n-1}-1)=10\cdot10^{n-1}-10^{n-1}=9\cdot10^{n-1}$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ．　したがって　$\boldsymbol{a_n=9\cdot10^{n-1}}$

3　n を正の整数，r を 0 および 1 でない実数とし，$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}$，$\displaystyle T=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$，

$\displaystyle U=\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を記号 Σ を用いずに r，n で表せ．

(2)　T を記号 Σ を用いずに S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3)　U を記号 Σ を用いずに S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

(1)　$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}=\boldsymbol{\frac{1-r^n}{1-r}}$

(2)　$T=1\cdot1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot r^{n-2}+n\cdot r^{n-1}$

$rT=\qquad 1\cdot r+2\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot r^{n-2}+(n-1)\cdot r^{n-1}+n\cdot r^n$

よって　$(1-r)T=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}-n\cdot r^n=S-n\cdot r^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{T=\dfrac{S-nr^n}{1-r}}$

(3)　$U=1^2\cdot1+2^2\cdot r+3^2\cdot r^2+\cdots\cdots+n^2\cdot r^{n-1}$

$rU=\qquad 1^2\cdot r+2^2\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\cdot r^{n-1}+n^2\cdot r^n$

よって　$(1-r)U=1+3r+5r^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot r^{n-1}-n^2\cdot r^n$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot r^{k-1}-n^2\cdot r^n=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-n^2\cdot r^n$$

$$=2T-S-n^2\cdot r^n$$

ゆえに　$\boldsymbol{U=\dfrac{2T-S-n^2r^n}{1-r}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　数列(2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n^3+6n^2+n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）であるとき，一般項は $a_n=$ ア n^2+ イ $n-$ ウ である．さらに，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\boxed{エ}}\left(\frac{1}{3n-\boxed{オ}}-\frac{1}{3n+\boxed{カ}}\right),\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$$

である．

$a_1=S_1=3\cdot1^3+6\cdot1^2+1=10$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^3+6n^2+n)-\{3(n-1)^3+6(n-1)^2+(n-1)\}\\&=3n^3+6n^2+n-(3n^3-9n^2+9n-3+6n^2-12n+6+n-1)\\&=9n^2+3n-2\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

よって　$a_n=\mathbf{9}n^2+\mathbf{3}n-\mathbf{2}$

このとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{\mathbf{3}}\left(\frac{1}{3n-\mathbf{1}}-\frac{1}{3n+\mathbf{2}}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)\\&=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{32}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。